شتاب گرانش درون زمین

میشل دراگونی، دانشگاه بولونیا، ایتالیا
حسن قلمی باویل علیایی ، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب

شتاب گرانش در قسمت داخلی زمین براساس توزیع چگالی آن تعیین می‌شود. اما نتیجهٔ قابل توجه این است که شتاب تقریباً در سراسر گوشته، که حدود ۸۴٪ از حجم زمین را تشکیل می‌دهد، ثابت است. این نتیجه را می‌توان با یک مدل دو لایه‌ای ساده از زمین توضیح داد. علت عدم تغییر شتاب در گوشته به خاطر اندازه و چگالی هستهٔ زمین با توجه به اندازه و چگالی کل زمین است. در سایر سیارات، با توزیع متفاوت جرم، وابستگی شتاب به عمق و فاصله می‌تواند بسیار متفاوت باشد.

شناخت میدان گرانش درون کرهٔ زمین از اهمیت بالایی برخوردار است، زیرا گرانش یکی از نیروهای اصلی کنترل حرکات درونی زمین، مانند حرکت‌های همرفتی است که در هسته و گوشته رخ می‌دهد. این حرکت‌ها منشأ مبانی آشکارسازی فعالیت سیاره، مانند میدان مغناطیسی و دینامیک سطح (ساختمان‌شناسی لایه‌های زمین، آتشفشان، زمین‌لرزه) است. به‌ویژه، گرادیان دمای بی‌دررو (یعنی حداقل شیب دما که امکان جابه‌جایی در یک مایع قابل فشرده شده را فراهم می‌کند) متناسب با شتاب گرانش است.[1]

محاسبهٔ شتاب گرانش درون زمین به دانش توزیع چگالی جرم در سطح زمین نیاز دارد. به‌عنوان اولین تقریب، می‌توان فرض کرد که زمین دارای تقارن کروی است، و چگالی آن فقط به شعاع r از مرکز سیاره بستگی دارد.

با استفاده از این فرض، می‌توان توزیع چگالی را از معادلهٔ آدامز – ویلیامسون[2] به‌دست آورد که گرادیان چگالی شعاعی را با خواص الاستیک در یک سیاره با تقارن کروی، تحت شرایط هیدرواستاتیک، مرتبط می‌کند. حل معادله نیاز به دانستن سرعت موج لرزه‌ای دارد که تابعی از r است، و می‌تواند از داده‌های لرزه‌سنجی محاسبه شود.

نمودارهای شتاب گرانش، به‌عنوان تابعی از متغیر r، در سطح زمین، رفتار غافلگیرکننده‌ای را نشان می‌دهد[3و4]. گرانش تقریباً ثابت و برابر با مقدار سطح در کل گوشته (پوسته‌ای با ضخامت حدود ۳۰۰۰ کیلومتر) است که گفتیم ۸۴٪ از کل حجم زمین را تشکیل می‌دهد. این واقعیت را می‌توان براساس مدل سادهٔ زمینی با دو لایه نشان داد.

نقش اصلی مدل‌ها، تولید پدیده‌های قابل مشاهده و آشکارسازی روابط موجود بین مقادیر توصیفی از یک سیستم فیزیکی است. یک مدل همیشه سیستم را ساده‌سازی می‌کند، اما فقط چند جنبه را در نظر می‌گیرد، و بسیاری دیگر از جنبه‌ها به‌طور هدفمند مورد غفلت قرار می‌گیرند، چرا که به نظر نمی‌رسد برای مسئله مهم باشند.

در این مقاله از مدل دو لایه استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که شتاب گرانش در گوشته، نسبت به مقادیر خاص بین شعاع هسته و شعاع زمین و چگالی زمین، ثابت است. به منظور روشن شدن این حقیقت، از مدل‌های سادهٔ

سیارات با تقارن کروی استفاده می‌شود. در این حالت شتاب گرانش در فضای داخلی آن سیارات با توجه به توزیع متفاوت چگالی براساس نظریهٔ نیوتنی محاسبه می‌گردد.

شتاب گرانش

اگر a شعاع کرهٔ زمین و ρ چگالی آن باشد. می‌توان شتاب گرانش g در قسمت داخلی سیاره را به راحتی از رابطهٔ زیر محاسبه کرد. با یادآوری اینکه قانون گرانش نیوتن مشابه قانون گاوس است، اگر r شعاع کروی سطح باشد آنگاه:

(۱)
$$g(r) = -\frac{Gm(r)}{r^{2}},$$

که در آن G ثابت گرانشی و m (r) جرم احاطه شده در شعاع r و حجم :v است.

(۲)
$$m(r) = \int_{v} \rho dv$$

اگر توزیع جرم دارای تقارن کروی باشد، یعنی چگالی ρ فقط به میزان فاصله از مرکز کره وابستگی داشته باشد، آنگاه به کمک انتگرال می‌توان جرم را به‌دست آورد.

(۳)
$$m(r) = 4\pi\int_{0}^{r} \rho(r')r'^{2}\, dr'$$

بنابراین از رابطه (۱) خواهیم داشت

(۴)
$$g(r) = -\frac{4\pi G}{r^{2}}\int_{0}^{r} \rho(r')r'^{2}\, dr'$$

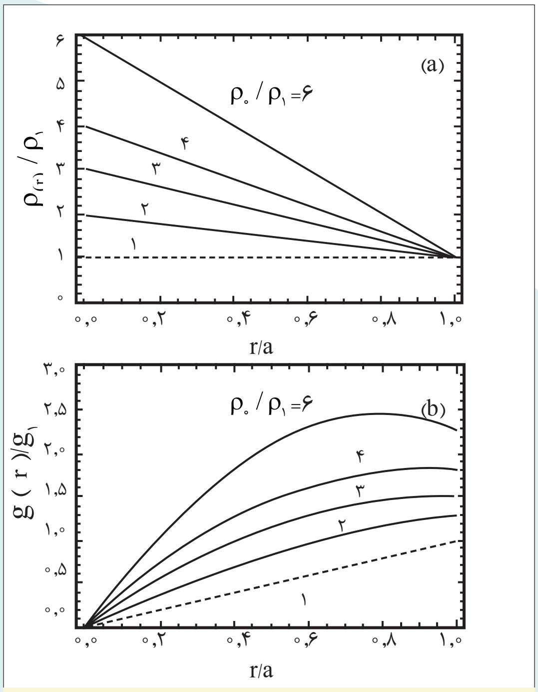
که در آن علامت منفی نشان می‌دهد که شتاب به سمت مرکز سیاره است.

سیاره با چگالی متغیر خطی

در سیارات، چگالی به‌طور معمول با عمق افزایش می‌یابد. در مورد زمین این افزایش مداوم از سطح به مرکز زمین عموماً تا پایان قرن نوزدهم رخ داده است[۷]. فرض کنید چگالی در مرکز سیاره ρ_0 است و به‌طور خطی به مقدار ρ_1 در سطح کاهش می‌یابد، یعنی:

(۵)
$$\rho(r) = \rho_0 - \frac{\rho_0 - \rho_1}{a} r$$

نمودار تابع $\rho(r)/\rho_1$ نسبت به ρ_0/ρ_1 برای مقادیر مختلف در شکل (۱-الف) ترسیم شده است. از معادله (۴) شتاب گرانش در سیاره زمین به دست می‌آید.



▲ شکل ۱ الف. تابع توزیع چگالی $\rho(r)/\rho_1$ نسبت به r/a
ب. شتاب گرانش g(r) برای توزیع چگالی نشان داده شده در قسمت الف

(۶)
$$g(r) = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0 r + \pi G\frac{\rho_0 - \rho_1}{a} r^{2}$$

با قرار دادن $\rho_0=\rho_1$ و a=r، شتاب را در سطح سیاره با چگالی یکنواخت ρ_1 به‌دست می‌آوریم.

(۷)
$$g_1 = -\frac{4}{3}\pi G\rho_1 a$$

نمودار مربوط به تابع $g(r)/g_1$ در شکل ۱ ب، برای مقادیر متفاوت p_0/p_1 ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که تابع g(r) به‌طور کلی یکنواخت نیست. فقط در صورت $\rho_0/\rho_1 \le 3$، تابع همیشه افزایش می‌یابد تا به مقدار r=a برسد. اگر $\rho_0/\rho_1 > 3$، شتاب حداکثر در $r=r_0$ به‌وجود می‌آید.

(۸)
$$\frac{r_0}{a} = \frac{2}{3}\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_1}$$

در حالت $\rho_0 >> \rho_1$ با افزایش نسبت ρ_0/ρ_1، سطح کروی در $r=r_0$ به مقدار مینیمم $r_0 = 2a/3$، کاهش می‌یابد. بنابراین، توزیع چگالی بسیار ساده، همان‌طور که توسط معادله (۵) ارائه شده است با توجه به مقدار نسبت ρ_0/ρ_1 می‌تواند برش‌های مختلفی از g(r) ایجاد کند.

در حالت خاص، وقتی چگالی ρ یکنواخت است، همان‌طور که با خطوط نقطه‌چین در شکل ۱، نشان داده شده است، از معادلهٔ (۶) نتیجه می‌شود:

(۹)

$$g(r) = -\frac{۴}{۳}\pi G\rho r$$

این نتیجه کاملاً شناخته‌شده‌ای است که شتاب گرانش به‌طور خطی با r کاهش می‌یابد. در واقع، طبق معادله (۴)، شتاب در هر عمقی متناسب با نسبت $m(r)/r^۲$ است، که در آن m جرمی است که شتاب ایجاد می‌کند. هر چه عمق سیاره با چگالی ثابت بیشتر شود m متناسب با $r^۳$ کاهش می‌یابد. بنابراین، نسبت $m(r)/r^۲$ متناسب با r کاهش می‌یابد.

سیارهٔ دولایه

فیزیکدان آلمانی امیل ویکهورت[۶] اولین کسی بود که در سال ۱۸۹۶ مدل زمین با هسته آهنی و پوسته سنگی را، با تغییر چگالی در مرز بین این دو قسمت پیشنهاد کرد[۷]. به‌عنوان یک مدل تقریبی برای زمین، اجازه دهید دو مورد را در نظر بگیریم. سیارهٔ دو لایه‌ای با چگالی ثابت مانند

(۱۰)

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_۱, ۰ \le r \le r_۱ \\ \rho_۲, r_۱ < r \le a \end{cases}$$

با فرض $\rho_۱ > \rho_۲$ و نیز می‌توانیم فرض کنیم که هستهٔ کره در فاصله $0 < r < r_۱$ و گوشته در فاصله $r_۱ < r < a$ است. میانگین چگالی سیاره برابر است با:

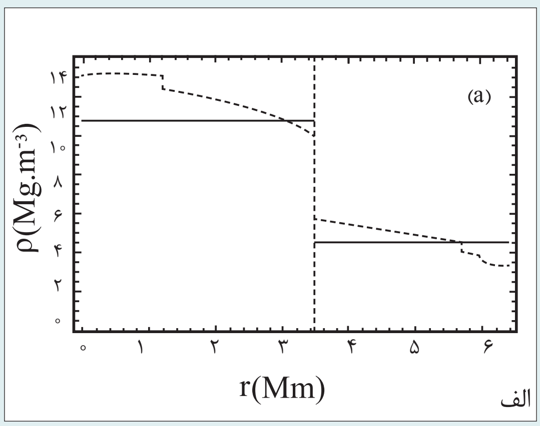
(۱۱)

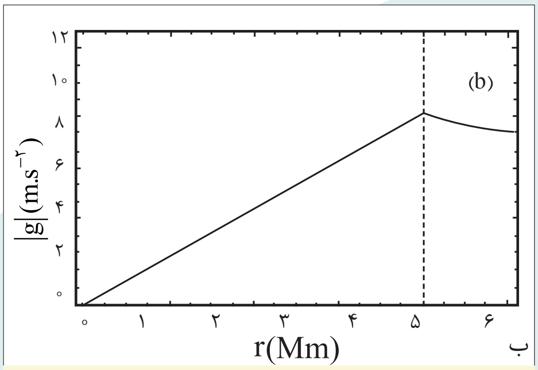
$$\rho^* = \frac{(\rho_۱ - \rho_۲)r_۱^۳ + \rho_۲ a^۳}{a^۳}$$

نمودار تابع $\rho(r)$ در شکل ۲ الف نشان داده شده است. مقادیر پارامترهای[۸] وابسته به زمین برابر است:

$a = ۶۳۷۱km$ ، $r_۱ = ۳۴۸۵km$

$\rho_۱ = ۱۰۸۰۰kg.m^{-۳}$ و $\rho_۲ = ۴۵۰۰kg.m^{-۳}$، پس از محاسبه $\rho^* = ۵۵۳۰kg.m^{-۳}$ به دست می‌آید. تابع توزیع چگالی واقعی در زمین نیز در شکل ۲ (الف) ترسیم شده است.





▲ شکل ۲. الف. توزیع چگالی در یک مدل دو لایه از زمین (خطوط پر) و چگالی واقعی درون زمین (خط شکسته)
ب. شتاب گرانش ناشی از مدل (خط پر) و شتاب واقعی در (خط نقطه‌چین).

از معادلهٔ (۴) می‌توان شتاب گرانش در هسته را که تابع خطی است به‌دست آورد:

(۱۲)

$$g(r) = -\frac{۴}{۳}\pi G\rho_۱ r, \quad ۰ \le r \le r_۱$$

در حالی که در گوشته توسط آن رابطه زیر به‌دست می‌آید:

(۱۳)

$$g(r) = -\frac{۴}{۳}\pi G\frac{(\rho_۱ - \rho_۲)r_۱^۳ + \rho_۲ r^۳}{r^۲}, \quad r_۱ \le r \le a$$

در یک سیارهٔ همگن با چگالی ρ^*، شتابی که در سطح تولید می‌شود چنین است:

(۱۴)

$$g^* = -\frac{۴}{۳}\pi G\rho^* a$$

در شکل ۲-ب، بزرگی g شتاب تابع r از تابع توزیع چگالی داده شده در شکل ۲ الف ترسیم شده است. قابل توجه است که g تقریباً برحسب r در لایه بیرونی ثابت است. شتاب واقعی گرانش در زمین نیز برای مقایسه ترسیم شده است.

بحث

همان‌طور که در شکل ۲ الف نشان داده شده است، تابع توزیع چگالی درون زمین یک تابع ثابت نیست و برحسب r تغییر می‌کند و با افزایش عمق هم در هسته و هم در گوشته افزایش می‌یابد. با این حال، معادلات (۱۲) و (۱۳) تقریب خوبی برای هدف ما هستند، همان‌طور که در شکل ۲ ب نشان داده شده است.

از این نکته که g تقریباً در گوشته ثابت است، می‌توان به راحتی فهمید که شتاب گرانش در سطح یک توده کروی، متناسب با حاصل ضرب چگالی متوسط در شعاع کره است (معادله ۱۴).

در حقیقت، معادله (۱۳) را برای شـــتاب در گوشته می‌توان به صورت زیر نوشت.

(۱۵)

$$g(r) = -\frac{4}{3}\pi G r\bar{\rho}(r)$$

که در آن

(۱۶)

$$\bar{\rho}(r) = \frac{(\rho_1 - \rho_2)r_1^3 + \rho_2 r^3}{r^3}$$

این چگالی متوسط در یک کره به شعاع r و در بازهٔ $r_1 < r < a$ برابر است با $\bar{\rho}(a) = \rho^*$

حاصل ضرب $r\bar{\rho}(r)$ برای کل کره زمین (یا برای قسمت‌های کروی زمین از جمله هسته) تقریباً یکسان است. به عبارت دیگر، حاصل ضرب $r\bar{\rho}(r)$ دارای یک مقدار ثابت در سراســـر گوشته است.

در حقیقت

(۱۷)

$$r\bar{\rho}(r) = r_1\rho_1 \quad r_1 \le r \le a$$

به طوری که

(۱۸)

$$g(r) = g(r_1) \quad r_1 \le r \le a$$

این بدان معنی است که شتاب گرانش در هر نقطه از گوشته تقریباً برابر با سطح هسته است. به خصوص،

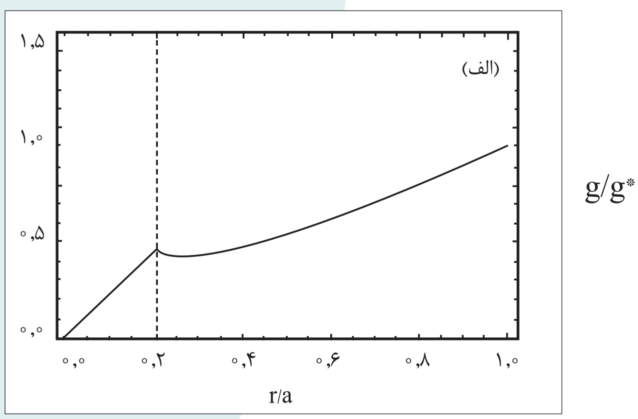
(۱۹)

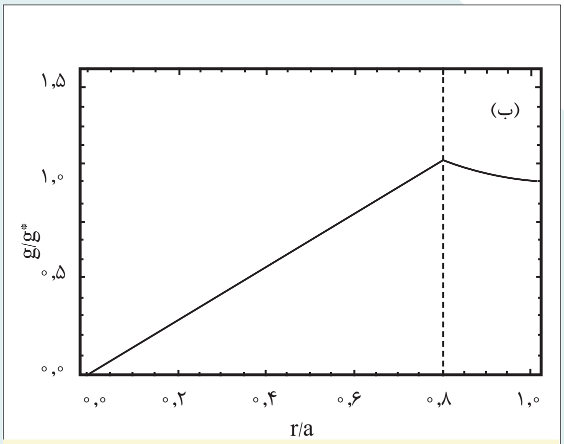
$$r_1\rho_1 \approx a\rho^*$$

هسته کوچک‌تر از کل کرهٔ زمین است، اما میانگین چگالی آن بالاتر است: به‌طوری که

(۲۰)

$$\frac{r_1}{a} \approx \frac{\rho^*}{\rho_1}$$





▲ شکل ۳. شتاب گرانش در فضای داخلی سیارات دو لایه با مقادیر مختلف نسبت a/r1: (الف) ۰/۲ (ب) ۰/۸ چگالی مقادیر ρ_1 و ρ_2 همانند زمین است.

در این حالت، r_1 / a = ۰/۵۵ و $\rho^* / \rho / 1$ = ۰/۵۱، با اختلاف نسبی تقریباً ۷٪ به‌دست می‌آید. بنابراین شتاب $g(r)$ در سطح زمین تقریباً با شتاب $g(r)$ در سطح هسته برابر است و تأثیر گوشته این است که این مقدار را به‌طور کامل بدون تغییر در طول ۳۰۰۰ کیلومتر نگه می‌دارد.

این بدیهی اســـت که ثابت بودن g در گوشتهٔ زمین تصادفی اســـت و از ارزش‌هـــای خـــاص نســـبت‌های r_1 / a و p^* / p_1 ناشـــی می‌شود. در سیارات دیگر، با مقادیر مختلف، نسبت‌ها و مشخصات گرانش درون سیاره می‌تواند بسیار متفاوت باشد.

به‌عنوان مثال، اگر هسته کوچک‌تر باشد (مثلاً r_1 / a = ۰/۲)، با همان مقادیر p_1 و ρ_2، شتاب گرانش $g(r_1)$ در سطح هسته تنها ۴۷٪ از آن در سطح ســـیاره خواهد شد [شکل. ۳(الف)]. اگر هسته بزرگ‌تر باشـــد (r_1 / a = ۰/۸)، ۱۲٪ بیشتر از $g(r)$ خواهد شد [شکل ۳ (ب)]. اتفاقاً، دو مقدار r_1 / a به ترتیب به مقادیر نسبت داده شده به ماه و عطارد نزدیک هستند.

در هر دو مورد یک شیب شعاعی قابل توجه از g در گوشته مانند هســـته وجود دارد. این می‌تواند شیب دمایی بی‌دررو و نیروی شـــناوری را تحت تأثیر قرار دهد و ممکن است شرایط انتقال گرما را تغییر دهد.

سقوط آزاد در امتداد قطر

در ســـال‌های اخیر حرکت جسمی که در یک چاه فرضی در امتداد قطر مدل زمین در حال سقوط است مورد توجه بسیاری از نویســـندگان قرار گرفته اســـت. برای مدل کردن آن فرض می‌کنیم شتاب گرانش به‌طور خطی در هسته افزایش می‌یابد و در گوشته ثابت است. با این کار یک راه‌حل تحلیلی ساده ارائه

می‌دهیم. در این حالت معادلهٔ حرکت برابر است با:

(۲۱)
$$\frac{d^2r}{dt^2} = g(r),$$

که در آن t زمان است و

$$g(r) = \begin{cases} -\omega^2 r, & 0 \le r \le r_1 \\ -\omega^2 r_1, & r_1 < r \le a \end{cases}$$

(۲۲)

با

$$\omega^2 = \frac{4}{3}\pi G \rho_1$$

(۲۳)

اگر حرکت از t=۰ شروع شود، حل برای گوشته خواهد شد:

$$r(t) = a - \frac{1}{2}\omega^2 r_1 t^2.$$

(۲۴)

جسم به مرز گوشته و هسته در زمان زیر خواهد رسید:

(۲۵)
$$t_1 = -\frac{v_1}{\omega^2 r_1}$$

در این حالت سرعت آن برابر است با:

(۲۶)
$$v_1 = -\omega\sqrt{2r_1(a - r_1)}.$$

برای $t \ge t_1$، حرکت در هسته برابر است با:

(۲۷)
$$r(t) = r_1 \cos\omega(t - t_1) + \frac{v_1}{\omega}\sin\omega(t - t_1)$$

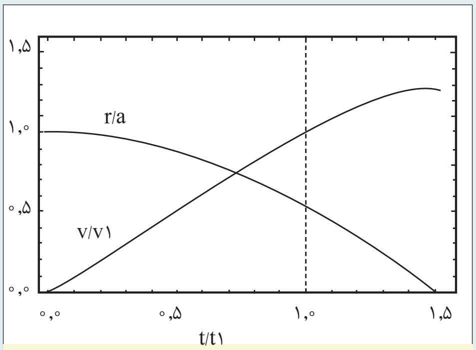
تا زمان

(۲۸)
$$t_2 = t_1 + \frac{1}{\omega}\arctan\frac{1}{\omega t_1}$$

وقتی جسم با سرعت زیر به مرکز زمین می‌رسد:

(۲۹)
$$v_2 = v_1\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 t_1^2}}.$$

به‌طور مشابه حرکت در نیمکرهٔ دیگر تکرار می‌شود و زمان مورد نیاز برای عبور از کل کرهٔ زمین $2t_2$ خواهد شد یعنی ۳۷/۴ دقیقه. اگر از مقادیر r_1، ρ_1 در فرض در بالا استفاده کنیم، نزدیک به ۳۸/۲ دقیقه (طبق PREM) به دست می‌آید. تابع مکان و سرعت بر حسب زمان در شکل ۴ نشان داده شده است.



▲ شکل ۴. مدل، مکان $r(t)$ و سرعت $v(t)$ جسم در امتداد قطر زمین در حالت دولایه را نشان می‌دهد. خط‌چین عمودی عبور از مرز گوشته – هسته را نمایش می‌دهد. مقادیر a و r_1 مفروض و $t_2 \cong 1/5 t_1$ است.

نتایج

در کرهٔ زمین، مقادیر خاص نسبت‌های بین شعاع هسته و شعاع سیاره و نیز بین چگالی متوسط هسته و چگالی متوسط باعث افزایش شتاب تقریباً ثابت گرانش در سراسر گوشته زمین می‌شود. این واقعیت ناشی از نقش گرانش در کنترل دینامیک درونی زمین است. در سیارات دیگر، با تغییر مقادیر دو نسبت، وابستگی گرانشی به فاصله متفاوت و شرایط به روز همرفت حرارتی در گوشته را ایجاد می‌کند. در مدل دو لایهٔ زمین، تقریب میدان در سراسر گوشته ثابت است و حل تحلیلی ساده برای سقوط آزاد یک جسم در یک چاه در امتداد قطر کرهٔ زمین را ارائه می‌دهد.

از مدل‌های ارائه شده در بالا می‌توان علاوه بر موارد ذکر شده با فرض چگالی یکنواخت، در کلاس‌های فیزیک مقدماتی یا کلاس‌های نجوم نیز استفاده کرد. مدل‌ها نشان می‌دهند که گرانش در فضای داخلی سیاره می‌تواند یک تابع غیرشهودی از عمق و فاصله باشند و تغییر در توزیع چگالی می‌تواند زمینه‌های گرانش مختلف را ایجاد کند و پیامدهایی بر دینامیک درونی سیاره داشته باشد. بنابراین آن‌ها می‌توانند در مبحث سیاره‌شناسی استفاده شوند. سرانجام، سقوط آزاد جسم در یک چاه در سراسر زمین دو لایه، تمرین مکانیک نیوتنی در حضور نیرویی است که تابعی از موقعیت و مکان است.

منابع

1.D.L,. Anderson, Theory of the Earth (Cambridge University press, NewYork, 2007).
2. T.Lay and T.C. Wallace, Modern Global Seismology (Academic Press, London, 1995).
3. G.C. Brown and A.E. Mussett, The Inaccessible Earth, 2nd ed. (Chapman & Hall, London, 1993).
4. F. D. Stacey and P.M. Davis, Physics of the Earth, 4th ed. (cambridge University Press, NewYork, 2008).
5. R. Snyder, “Two-density model of the Earth”, Am. J.Phys. 54, 511-513 (June 1986).
6. A.J. Simoson, “The gravity of Hades”, Math. Mag. 75 (5), 335- 350 (2002) and Hesiod’s Anvil: Falling and Spinning through Heaven and Earth, No, 30 (Mathematical Association of America, 2007).
7. S. G. Brush, “Discovery of the Earth’s core,” Am. J. Phys. 48, 705-724 (Sept. 1980).
8. D.L. Turcotte and G.Schubert, Geodynamics, 3rd ed. (Cambridge University Press, NewYork, 2014).
9. A. R. Klotz, “The gravity tunnel in a non-uniform Earth”, Am. J. Phys. 83, 231-237 (March 2015).
10. D. W. Pensell, “Flying Through polytropes”, Am. J. Phys. 84, 192- 201 (March 2016).
11. S. Isermann, “Analytical solution Of gravity tunnels through an inhomogeneous Earth”, Am. J. Phys. 87, 10-17 (Jan. 2019).
12. A. M. Dziewonski and D. L. Anderson, “Preliminary Reference Earth Model”, Phys. Earth Planet. Inter. 25, 297 - 356 (1981).